Université
Internationale
de Casablanca

**CLASSES PRÉPARATOIRES INTÉGRÉES 2ème année**

**S3 - ALG3**

# ALGÈBRE

Pr. Hassan EL AMRI

Année universitaire : 2017-2018

# Table des matières



...

Espaces vectoriels et Applications linéaires ; Noyau et image ; Rang d'un endomorphisme ; théorème du rang, théorème de la base incomplète (8h)
Matrices : Propriétés matricielles ; Rang de matrice ; inversion de matrice ;(8h)
Systèmes linéaires : Méthode de Gauss, de Cramer( 8h)

# Partie 1

# ESPACES VECTORIELS

## 1.1 Définitions

Dans le cours le corps $\mathbb{K}$ considéré sera toujours $\mathbb{R}$ et dans certains cas qu'on précisera $\mathbb{C}$.

**Définition 1.1.1** (Groupe commutatif)**.** *Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et vérifiant :*

1. $\forall x, y \in E$ *on* $x + y \in E$
2. $\forall x, y \in E$ *on* $x + y = y + x$
3. $\exists 0_E \in E$ *tel que* $\forall x \in E$ *on a* $x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*
4. $\forall x \in E$, $\exists x' \in E$ *tel que* $x + x' = x' + x = 0_E$*. On note* $x' = -x$
5. $(x + y) + z = x + (y + z)$ $\forall x, y, z \in E$

*L'ensemble $(E, +)$ vérifiant les quatre axiomes ci dessus est appelé **groupe commutatif ou groupe abélien**.*

**Définition 1.1.2.** *On appelle loi de composition externe sur $E$ toute application de $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ qui au couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ associe un élément de $E$ noté $\lambda.x$ ou plus simplement $\lambda x$.*

**Définition 1.1.3.** *Le triplet $(E, +, .)$, c'est à dire l'ensemble $E$ muni de la loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, est dit **espace vectoriel** si :*

1. $(E, +)$ *est un groupe abélien (donc vérifie les cinq axiomes de la définition (1.1.1).*
2. $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ : $\quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3. $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ : $\quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ : $\quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
5. $\forall x \in E$ : $\quad 1x = x$.

*Les éléments de $E$ sont appelés des **vecteurs** et ceux du corps $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.*

**Exercice 1.1.4.** *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\forall x \in E$*

1. $x + x = 2x$
2. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
3. $(-1)x = -x$

**Exemple 1.1.5.**

1. *L'ensemble $(\mathbb{R}, +, .)$ muni de l'addition et de la multiplication naturelles est un espace vectoriel sur lui même.*
2. $(\mathbb{C}, +, .)$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, +, .)$ muni de la loi de composition interne définie par :*
   $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$
   $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
   *et de la loi de composition externe définie par :*
   $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
   $$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$
   *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
4. *L'ensemble des fonctions $F(A, \mathbb{R})$ d'un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : Si $f, g \in F(A, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $f + g$ et $\lambda f$ pour tout $x \in A$ par :*
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad et \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

5. *L'ensemble des fonctions continues $C(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
6. *L'ensemble des fonctions dérivables $D(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
7. *L'ensemble des fonctions infiniment dérivables $D^\infty(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
8. *On peut évidemment considérer dans les exemples précédents des intervalles fermés à gauche ou à droite.*
9. *L'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.*
10. *L'ensemble polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné $n$ sur $\mathbb{R}$*
11. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.*
12. *L'espace $E$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui même muni de la loi composition interne $(fog)(x) = f(g(x))$ et de la loi de composition externe $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ n'est pas un espace vectoriel (Pourquoi ?)*

## 1.2 Sous espace vectoriel

**Définition 1.2.1.** *Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $F \subset E$ non vide. $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ si*

1. $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \lambda u \in F$.

**Théorème 1.2.2.** *Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $F \subset E$ non vide. $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ si et seulement si*

$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a }, \quad u + \lambda v \in F$$

**Théorème 1.2.3.** *Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. L'intersection de deux sous espace vectoriels de $E$ est un sous espace vectoriel de $E$.*

**Démonstration.** Soit $F_1$ et $F_2$ deux sous espaces vectoriels de $E$. Comme $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $F = F_1 \cap F_2$ est non vide.
Soit $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $u + \lambda v \in F_1$ et $u + \lambda v \in F_2$ donc $u + \lambda v \in F$ ∎

**Exercice 1.2.4.** *Que peut on dire de la réunion de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel ? Donner un contre exemple.*

## 1.3 Systèmes de vecteurs

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle système de vecteurs toute famille de la forme $(v_1, v_2, ..., v_n)$ où $v_1, v_2, ..., v_n \in E$ et $n$ entier quelconque.

### 1.3.1 Systèmes libres

**Définition 1.3.1.** *Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $E$ est dit libre si*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E\right) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}})$$

*Un système qui n'est pas libre est dit **système lié**.*

**Remarque 1.3.2.** *Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $E$ est lié s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ **NON TOUS NULS** tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$*

**Exemple 1.3.3.**
1. *Un système qui contient le vecteur nul est lié (c'est à dire n'est pas libre)*
2. *Un système qui contient deux fois le même vecteur est lié.*
3. *Un système qui contient un sous-système lié est lié.*
4. *Un système qui est contenu dans un sous-système libre est libre.*
5. *Dans $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ le système $\left(1, X, X^2, ..., X^n\right)$ est libre.*
6. *Soit $P_i$ un polynôme de la forme $X^i + a_{i-1}X^{i-1} + ... + a_0$, Dans $\mathbb{P}_n$ le système $(P_0, P_2, ..., P_n)$ est libre.*
7. *Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le système $(1, e^x, ..., e^{nx})$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

### 1.3.2 Systèmes générateurs

**Définition 1.3.4.** *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $E$ est dit générateur si pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

**Exemple 1.3.5.** *Dans $\mathbb{R}^n$ tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ peu s'écrire sous la forme*

$$x = (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n)$$

*et encore*

$$x = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1)$$

*et si on pose*

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \\ ... \\ e_n = (0, 0, ..., 1) \end{cases}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

*qui veut dire que le système $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est un système générateur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.*

### 1.3.3 Base d'un espace vectoriel

**Définition 1.3.6.** *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $E$ est une base de $E$ s'il est libre et générateur de $E$. $n$ est alors appelé la dimension de $E$, $dim E = n$.*

**Exemple 1.3.7.**

1. *Dans l'exemple 1.3.5 le système $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.*
   *En effet, on a vu qu'il est générateur. Montrons qu'il est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. et supposons que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0).$$

   *Donc $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (0, 0, ..., 0)$ et donc tous les $\lambda_i$ sont nuls. CQFD.*
2. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ est un espace vectoriel. Sa base est $(y_1, y_2)$ où $y_1(x) = sin(2x)$ et $y_2(x) = cos(2x)$.*

# Partie 2

# APPLICATIONS LINÉAIRES

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. Une application de $E$ dans $F$ est dite est dite application linéaire si elle vérifie :*

$$\forall x, y \in E \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2.1}$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K \ , \ f(\lambda x) = \lambda f(x) \tag{2.2}$$

**Exemple 2.1.2.**

1. *Pour tout réel $a$ l'application*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & ax \end{array} \right. \tag{2.3}$$

*est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans lui même.*

2. *L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

*est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*

3. *L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

*est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.*

4. *Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & \int_0^1 u(t)dt \end{array} \right. \tag{2.6}$$

*est une application linéaire de $C([0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*

5. *Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & u(\frac{1}{2}) \end{array} \right. \tag{2.7}$$

*est une application linéaire de $C([0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*

6. *Soit $C^1([0,1])$ l'espace des fonctions de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C^1([0,1]) & \longrightarrow & C([0,1]) \\ & u & \longrightarrow & u' \end{array} \right. \tag{2.8}$$

*est une application linéaire de $C^1([0,1])$ dans $C([0,1]$..*

**Définition 2.1.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

1. *$f$ est dite **isomorphisme** si $f$ est une bijection de $E$ dans $F$,*
2. *$f$ est dite **endomorphisme** si $E = F$,*
3. *$f$ est dite **automorphisme** si $f$ est une bijection de $E$ dans lui même (ie $E = F$).*

## 2.2 L'espace L(E,F)

**Définition 2.2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. On note par $L(E,F)$ l'espace de toutes les applications linéaires de $E$ dans $F$.*
*Lorsque $E = F$ on le note $L(E)$*

## 2.3 Opérations sur les applications linéaires

**Définition 2.3.1.** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.*

1. *On définit la somme (**la loi de composition interne**) de $f$ et $g$ par :*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ , \ \forall x \in E$$

2. *On définit le produit de $f$ par un scalaire (**la loi de composition externe**) :*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \ , \ \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \in K$$

**Théorème 2.3.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. L'espace $L(E,F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$ muni des lois définies ci dessus est un espace vectoriel sur $K$.*

## 2.4 $E' =$ Dual de $E = L(E, \mathbb{R})$

**Définition 2.4.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps $K$. On appelle dual de $E$ l'espace $L(E, \mathbb{R})$.*
*Les éléments de $E'$ sont appelés des **formes linéaires** sur $E$.*

**Théorème 2.4.2.** *L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels sur un même corps $K$. Soit

$$f : E \longrightarrow F \ , \ g : F \longrightarrow G$$

deux applications linéaires.
Alors

$$gof(x + y) = g\left(f(x + y)\right) = g\left(f(x) + f(y)\right) = g(f(x)) + g(f(y)) = gof(x) + gof(y)$$

et

$$gof(\lambda x) = g\left(f(\lambda x)\right) = g\left(\lambda f(x)\right) = \lambda g\left(f(x)\right) = \lambda gof(x)$$

**Théorème 2.4.3.** *Si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors*

1. $f(0_E) = 0_F \quad , \quad f(-x) = -f(x)$.
2. *Si $A$ est un sous espace vectoriel de $E$ alors*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

*est un sous espace vectoriel de $F$.*

3. *Si $B$ est un sous espace vectoriel de $F$ alors*

$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y), y \in B\}$$

*est un sous espace vectoriel de $E$.*

**Démonstration.**

1. $x + 0_E = x$ donc $f(x + 0_E) = f(x)$ comme $f$ est linéaire alors $f(x) + f(0_E) = f(x)$, c'est à dire $f(0_E) = f(x) - f(x) = 0_F$ De même on a : $x + (-x) = 0_E$ donc $f(x) + f(-x) = f(0_E) = 0_F$ D'où $f(-x) = -f(x)$.
2. On montre $f(A)$ est stable pour les deux lois : Soit $y_1, y_2 \in f(A)$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ on doit montrer que

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A)$$

Comme $y_1 \in f(A)$ alors $\exists x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = y_1$
Comme $y_2 \in f(A)$ alors $\exists x_2 \in A$ tel que $f(x_2) = y_2$
Comme $A$ est un sous espace vectoriel de $E$ alors :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$

Et donc

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in f(A)$$

On applique la linéarité de $f$ et on obtient

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in f(A)$$

c'est à dire

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A) \textbf{ CQFD}$$

3. On montre que $f^{-1}(B)$ est stable pour les deux lois : Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, on doit montrer que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$$

Comme $x_1 \in f^{-1}(B)$ alors $f(x_1) \in B$
Comme $x_2 \in f^{-1}(B)$ alors $f(x_2) \in B$
Comme $B$ est un sous espace vectoriel de $F$ alors :

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in B$$

Comme $f$ est linéaire ceci s'écrit :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in B$$

c'est à dire que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$$

■

## 2.5 Noyau et Image d'une application linéaire

**Définition 2.5.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ $(f \in L(E,F))$.*

1. *$f^{-1}(0_F)$ est un sous espace vectoriel de $E$. On l'appelle* ***noyau*** *de l'application linéaire $f$, et on le note $Kerf$.*
2. *$f(E)$ est un sous espace vectoriel de $F$. On l'appelle* ***image*** *de l'application linéaire $f$, et on le note $Imf$.*

**Théorème 2.5.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ $(f \in L(E,F))$.*

1. *$f$ est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$*
2. *$f$ est surjective si et seulement si $Imf = F$*

**Démonstration.**

1. $(\Rightarrow)$ : Supposons $f$ injective.
   Soit $x \in Kerf$, alors $f(x) = 0$ et donc $f(x) = f(0)$ et comme $f$ est injective alors $x = 0$, c'est à dire $Kerf = \{0\}$
   $(\Leftarrow)$ : Supposons $Kerf = \{0_E\}$.
   Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors comme $f$ est linéaire, $f(x - y) = 0$, et donc $x - y \in Kerf$, et comme $Kerf = \{0\}$ alors $x - y = 0$ c'est à dire $x = y$ et donc $f$ est injective.
2. C'est la définition de la surjectivité.

■

**Théorème 2.5.3.** *Si $f$ est un isomorphisme d'un espace vectoriel $E$ sur un espace vectoriel $F$ alors, $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ sur $E$.*

## 2.6 Image de parties de E

**Théorème 2.6.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ $(f \in L(E,F))$.*

1. *Si $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est un système générateur de $E$ alors $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ est un système générateur de $f(E)$.*
2. *L'image d'un système lié de $E$ est un système lié de $F$.*

**Démonstration.**

1. Soit $w \in f(E)$, alors $\exists v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme $(v_1, v_2, ..., v_n)$ engendre $E$ alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ tels que :
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
Et comme $f$ est linéaire alors
$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$
c'est à dire
$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$
et donc le système $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ engendre $f(E)$.
2. Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ un système lié de $E$. Alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ non tous nuls tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$
Donc
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0$$
et les $\lambda_i$ non tous nuls. C'est à dire que le système $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ est lié.

■

## 2.7 Rang d'une application linéaire

**Définition 2.7.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ $(f \in L(E, F))$. On appelle le rang de $f$ la dimension du sous espace $f(E)$ dans $F$, c'est à dire : $rang(f) = dim(f(E)) = dim(Im(f))$.*

**Théorème 2.7.2** (Théorème du range)**.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ $(f \in L(E, F))$. Alors*
$$dim(E) = rang(f) + dim(ker(f)).$$

## 2.8 Cas où $E$ est de dimension finie

**Théorème 2.8.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Supposons que $E$ est de dimension finie $(dimE = n)$.*
*Soit $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de $E$.*
*Alors pour tout système $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de $F$ il existe une application linéaire **unique** $f$ telle que*
$$\forall i = 1, ..., n \text{ , on a : } f(a_i) = b_i$$

**Démonstration.**
■

**Théorème 2.8.2** (et définition)**.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $K$. Supposons que $E$ est de dimension finie. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

1. *$f(E)$ est de dimension finie et $dimf(E) \leq dimE$*
2. *La dimension de $f(E)$ est le rang de l'application linéaire $f$, il est noté $rg(f)$, de plus :*
$$dimE = dimKerf + rg(f)$$

**Corollaire 2.8.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps $K$. On note $n = dimE$ et $p = dimF$.*
*Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Alors on a :*
1. *$rg(f) = n$ si et seulement si $f$ est injective.*
2. *$rg(f) = p$ si et seulement si $f$ est surjective.*

**Corollaire 2.8.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de même dimension finie sur un corps $K$. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :*
1. *$f$ est bijective (ie $f$ isomorphisme de $E$ sur $F$)*
2. *$f$ est injective $(Kerf = \{0\})$*
3. *$f$ est surjective $(f(E) = F)$*

# Partie 3

# MATRICES

## 3.1 Introduction

Soient $m$, $n$ deux entiers naturels strictement positifs. On note $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, f_2, ..., f_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Il est clair que

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = (1,0,0...,0) \in \mathbb{R}^n \\ e_2 = (0,1,0,0,...,0) \in \mathbb{R}^n \\ . \\ . \\ e_i = (0,0,...,1,0,0...,0) \in \mathbb{R}^n \\ . \\ . \\ . \\ e_n = (0,0,0,...,1) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. \tag{3.1}$$

et que

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = (1,0,0...,0) \in \mathbb{R}^m \\ f_2 = (0,1,0,0,...,0) \in \mathbb{R}^m \\ . \\ . \\ f_i = (0,0,...,1,0,0...,0) \in \mathbb{R}^m \\ . \\ . \\ . \\ f_m = (0,0,0,...,1) \in \mathbb{R}^m \end{array}\right. \tag{3.2}$$

On considère une application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}\right. \tag{3.3}$$

On cherche une écriture de $y$ en fonction de $x$. Comme $f(e_i) \in \mathbb{R}^m$ pour tout $i = 1, ..., n$ alors

$$\left\{\begin{array}{l} f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m \\ f(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m \\ . \\ . \\ f(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + ... + a_{mi}f_m \\ . \\ . \\ f(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m \end{array}\right. \tag{3.4}$$

C'est à dire pour tout $i = 1, ..., n$ on a :

$$f(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + ... + a_{mi}f_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}f_j$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$, posons $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ...x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

Donc

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ji} f_j$$

On peut permuter les sommations :

$$y = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} f_j$$

Et comme $f_j$ ne dépend pas de l'indice $i$ on peut le sortir de la sommation interne :

$$y = \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) f_j$$

C'est à dire que $y$ s'écrit dans la base de $\mathbb{R}^m$ sous la forme

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$$

avec pour tout $j = 1, ..., m$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ . \\ . \\ y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \\ . \\ . \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_i \\ . \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

**Définition 3.1.1.** *Soit $I = \{1, 2, ..., m\}$ et $J = \{1, 2, ..., n\}$ deux ensembles d'indices. On appelle matrice de type $(m, n)$ ($m$ lignes et $n$ colonnes) sur un ensemble $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toute application $A$ de $I \times J$ dans $K$ :*

$$\begin{cases} A: & I \times J & \longrightarrow & K \\ & (i, j) & \longrightarrow & A(i, j) = a_{ij} = a_i^j \end{cases} \tag{3.7}$$

*On note une matrice de type $(m, n)$ sous la forme d'un tableau ayant $m$ lignes et $n$ colonnes.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## 3.2 Propriétés : Égalité, Somme, Multiplication par un scalaire

1. Deux matrices $A$ et $B$ de même type $(m, n)$ sont égales si

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, ..., m; \forall j = 1, ..., n.$$

2. Soient $A$ et $B$ deux matrices de même type $(m, n)$. On définit la somme $A + B$ par

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j), i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

C'est à dire si on pose $C = A + B$ alors

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n.$$

3. Soit $A$ une matrice de type $(m,n)$ et $\lambda \in K$ alors la matrice $\lambda A$ est définie par
$$(\lambda A)(i,j) = \lambda A(i,j) = \lambda a_{ij}$$
C'est à dire si on pose $P = \lambda A$ alors
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = 1, ...m; j = 1, ..., n$$

**Définition 3.2.1.** *On note $M^{m,n}(K)$ l'espace des matrices de types $(m,n)$ sur $K$.*

**Théorème 3.2.2.** *L'espace des matrices $M^{m,n}(K)$ défini ci dessus est un espace vectoriel sur le corps $K$.*

1. Élément neutre : La matrice nulle
$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$
2. L'élément opposé d'une matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A$ dont les termes sont
$$(-A)(i,j) = -a_{ij}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

**Exercice 3.2.3.** *Soit $p$, $q$ et $r$ trois entiers naturels strictement positifs. On considère les applications linéaires suivantes*
$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ & x \longrightarrow y = f(x) \end{cases} \tag{3.8}$$
*et*
$$\begin{cases} g: & \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^r \\ & y \longrightarrow z = g(y) \end{cases} \tag{3.9}$$
*deux applications linéaires.*

1. *Écrire la matrice $A_f$ associée à l'application linéaire $f$,*
2. *Écrire la matrice $A_g$ associée à l'application linéaire $g$,*
3. *Montrer que l'application*
$$\begin{cases} gof: & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^r \\ & x \longrightarrow z = gof(x) \end{cases} \tag{3.10}$$
*est linéaire,*
4. *Écrire la matrice $A_{gof}$ associée à l'application linéaire $gof$.*
5. *On pose $A = A_f, B = A_g$ et $C = A_{gof}$.*

*Calculer $c_{ij}$ en fonction des $a_{ik}$ et $b_{kj}$*
6. *définir le produit $AB$ de deux matrices $A \in M^{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in M^{q,r}(\mathbb{R})$.*
7. *On suppose que $p = q = r$ Montrer que la matrice*
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$
*est l'élément neutre de cette multiplication.*
8. *....*

## 3.3 Matrice Transposée

**Définition 3.3.1.** *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}} \in M^{m,n}$ une matrice. On appelle la matrice transposée de $A$ la matrice notée ${}^tA$ définie par : ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} \in M^{n,m}$ où*
$$b_{ij} = a_{ji}$$

**Remarque 3.3.2.** *La transposée de la transposée d'une matrice $A$ est la matrice $A$ :*

$$^t(^tA) = A$$

**Exemple 3.3.3.** 1. *La transposée de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*est la matrice*

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$$

2. *La transposée de la matrice*

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{bmatrix}$$

*est la matrice*

$$^tU = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

**Théorème 3.3.4.** *Les espaces $M^{m,n}$ et $M^{n,m}$ sont des espaces vectoriels isomorphes.*

En effet l'application

$$\begin{cases} L: & M^{m,n} & \longrightarrow & M^{n,m} \\ & A & \longrightarrow & ^tA \end{cases} \tag{3.11}$$

est un isomorphisme (c'est à dire application linéaire bijective).

## 3.4 Matrice ligne

On appelle matrice ligne toute matrice $A$ de type $(1, n)$, c'est à dire $A \in M^{1,n}(K)$ :

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

## 3.5 Matrice colonne

On appelle matrice colonne toute matrice $A$ de type $(m, 1)$, c'est à dire $A \in M^{m,1}(K)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix}$$

## 3.6 Matrice carrée

On parle de matrice carrée lorsque $m = n$, c'est dire $A \in M^{n,n}(K)$.

## 3.7 Matrice diagonale

On appelle matrice diagonale toute matrice $A \in M^{n,n}(K)$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ii} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 3.8 Matrice triangulaire

On appelle matrice **triangulaire inférieure** toute matrice $A$ telle que

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } i \leq j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & . & . \\ a_{i1} & . & . & a_{ii} & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice **triangulaire supérieure** toute matrice $A$ telle que

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } j \leq i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & .a_{3n} \\ 0 & 0 & . & a_{ii} & a_{i,i+1} & .a_{in} \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Remarque 3.8.1.** *Si une matrice est triangulaire supérieure alors sa matrice transposée est triangulaire inférieure, et réciproquement.*

## 3.9 Matrice symétrique

Une matrice carrée $A$ est dite symétrique si $\forall i, j = 1, ..., n$ on

$$a_{ij} = a_{ji}$$

c'est à dire

$$^tA = A.$$

Une matrice $A$ est dite antisymétrique si

$$^tA = -A.$$

## 3.10 Produit de matrices

Soient $A$ une matrice de type $(m, n)$ et $B$ une matrice de même type $(n, p)$. On définit le produit $AB$ par $C = AB$ de type $(m, p)$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ , } \forall i = 1, ..., m \text{ , } \forall j = 1, ..., p$$

**Exercice 3.10.1.** *Soient $A$ et $B$ deux matrices de type $(n, n)$. Montrer que*

$$^t(A.B) = {^tB}.{^tA}$$

**Exercice 3.10.2.** *Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et $A(\theta)$ la matrice définie par* $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

1. *Soient $\theta, \theta' \in [-\pi, \pi[$, calculer le produit $A_\theta . A_{\theta'}$*
2. *Calculer $(A_\theta)^p$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$*
3. *Montrer que $\forall \theta \in [-\pi, \pi[$ la matrice $A_\theta$ est inversible et donner sa matrice inverse.*

**Exercice 3.10.3.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M(a, b)$ la matrice définie par :*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

*On note $\mathfrak{M}$ l'espace de toutes les matrices de la forme $M(a, b)$.*

$$\mathfrak{M} = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

*Montrer que $(\mathfrak{M}, +, .)$ est un corps commutatif.*

## 3.11 Base de $M^{m,n}$

Soit $E_j^i$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément qui se trouve dans la $j$ -ème ligne $(j = 1, ..., m)$ sur la $i$ -ème colonne $(i = 1, ..., n)$ :

$$\left(E_j^i\right)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} \text{ ; } \forall k = 1, ..., n \text{ ; } \forall l = 1, ..., m$$

**Théorème 3.11.1.** *Le système $\left(E_1^1, ..., E_j^i, ..., E_m^n\right)$ est une base de $M^{m,n}$. Et l'espace $M^{m,n}$ est un espace vectoriel de dimension $mn$.*

Si $A = (a_{ij})_{i=1,m;j=1,n}$ alors

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}E_{ij}$$

## 3.12 Changement de base

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique matrice carrée de type $(n, n)$ telle que :

$$f(x) = Ax \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

La matrice $A$ s'écrit

$$A = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$$

avec $f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix}$,..., $f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ . \\ . \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, ,..., $f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une nouvelle base $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ $f$ va s'écrire dans cette nouvelle base sous la forme

$$f(x) = A'x \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où

$$A' = (f(e'_1), f(e'_2), ..., f(e'_n))$$

Chaque élément de la nouvelle base s'écrit dans l'ancienne base comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} e'_1 = p_{11}e_1 + e_{11}e_2 + ... + p_{n1}e_n \\ e'_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n \\ . \\ . \\ e'_i = p_{1i}e_1 + e_{1i}e_2 + ... + p_{ni}e_n \\ . \\ . \\ e'_n = p_{1n}e_1 + e_{1n}e_2 + ... + p_{nn}e_n \end{array}\right. \tag{3.12}$$

On construit alors une nouvelle matrice $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & p_{1j} & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & p_{2j} & . & . & p_{2n} \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ p_{i1} & p_{i2} & . & . & p_{ij} & . & . & p_{in} \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & p_{nj} & . & . & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les composantes d'un élément $x$ dans la base $(e_i)$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_i \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$ les composantes du même vecteur dans la base $(e'_i)$ alors

$$X = PX' \text{ ; } X' = P^{-1}X$$

**Théorème 3.12.1.** $(e_i)_{i=1,n}$, $(e'_i)_{i=1,n}$, *étant deux bases d'un espace vectoriel* $E$ *de dimension* $n$ *sur un corps* $K$, *la matrice* $P$ *qui a pour colonne* $j$ *les coordonnées de* $e'_j$ *dans la base* $(e_i)_{i=1,n}$ *est inversible ; on l'appelle la matrice de passage de la base* $(e_i)_{i=1,n}$ *à la base* $(e'_i)_{i=1,n}$, *de plus*

$$P = M\left(id_E, (e_i), (e'_i)\right) \ , \ P^{-1} = M\left(id_E, (e'_i), (e_i)\right).$$

## 3.13 Application aux applications linéaires

**Théorème 3.13.1.** *Soient* $E$ *et* $F$ *deux espace vectoriels de dimensions finies sur un corps* $K$.
*Soient* $(e_i)_{i=1,n}$, $(e'_i)_{i=1,n}$, *deux bases de* $E$ *et* $P$ *la matrice de passage de* $(e_i)$ *à* $(e'_i)$,
*Soient* $(f_i)_{i=1,m}$, $(f'_i)_{i=1,m}$, *deux bases de* $F$ *et* $Q$ *la matrice de passage de* $(f_i)$ *à* $(f'_i)$,
*Soit* $f$ *une application linéaire de* $E$ *dans* $F$.
*Soit* $A$ *la matrice de* $f : (E, (e_i)) \longrightarrow (F, (f_i))$,
*Soit* $A'$ *la matrice de* $f : (E, (e'_i)) \longrightarrow (F, (f'_i))$
*alors*

$$A' = Q^{-1}AP.$$

*Lorsque* $E = F$ *alors*

$$A' = P^{-1}AP.$$

# Partie 4

# SYSTÈMES LINÉAIRES

## 4.1 Matrice inversible

**Définition 4.1.1.** *Une matrice carrée $A$ d'ordre $n \times n$ est dite inversible si il existe une matrice (qu'on note) $A^{-1}$ telle que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

## 4.2 Système linéaire

Soit $A$ une matrice d'ordre $n \times n$ inversible. On note d'ordre $a_{ij}$ l'élément de $A$ de la $i$ème ligne et la $j$ème colonne. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème suivant :

Trouver $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ ...... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ...a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ ..... \\ ...... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.1}$$

Si on pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors ce problème s'écrit : Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$Ax = b$$

**Théorème 4.2.1.** *Le système (4.1) admet une* ***solution unique*** *si et seulement si la matrice $A$ est* ***inversible****.*

En effet en multipliant à gauche par $A^{-1}$ on obtient $x = A^{-1}b$.

## 4.3 Méthode directe de résolution

### 4.3.1 Méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \quad E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \quad E_2 \\ ..... \\ ...... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \quad E_i \\ ..... \\ ...... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = b_n \quad E_n \end{array}\right. \tag{4.2}$$

On multiplie l'équation $E_1$ par $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ et on fait la différence avec l'équation $E_2$
Puis l'équation $E_1$ par $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ et on fait la différence avec l'équation $E_3$
...
Puis l'équation $E_1$ par $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ et on fait la différence avec l'équation $E_i$
...
Puis l'équation $E_1$ par $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ et on fait la différence avec l'équation $E_n$
On obtient un nouveau système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \quad E_1 \\ \qquad a^1_{22}x_2 + ... + a^1_{2j}x_j + ... + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \quad E^1_2 \\ \qquad a^1_{32}x_2 + ... + a^1_{3j}x_j + ... + a^1_{3n}x_n = b^1_3 \quad E^1_3 \qquad ....... \\ \qquad ...... \\ \qquad a^1_{i2}x_2 + ... + a^1_{ij}x_j + ... + a^1_{in}x_n = b^1_i \quad E^1_i \\ \qquad ....... \\ \qquad ...... \\ \qquad a^1_{n2}x_2 + ... + a^1_{nj}x_j + ... + a^1_{nn}x_n = b^1_n \quad E^1_n \end{array}\right. \tag{4.3}$$

où

$$a^1_{ij} = a_{1j} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{ij}, \quad i,j = 2,n$$

On multiplie l'équation $E^1_2$ par $\frac{a^1_{32}}{a^1_{22}}$ et on fait la différence avec l'équation $E^1_3$
Puis l'équation $E^2_2$ par $\frac{a^2_{32}}{a^1_{22}}$ et on fait la différence avec l'équation $E^1_3$
...
Puis l'équation $E^1_2$ par $\frac{a^1_{i2}}{a^1_{22}}$ et on fait la différence avec l'équation $E^1_i$
...
Puis l'équation $E^1_2$ par $\frac{a^1_{n2}}{a^1_{22}}$ et on fait la différence avec l'équation $E^1_n$
On obtient un nouveau système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \quad E_1 \\ \qquad a^1_{22}x_2 + ... + a^1_{2j}x_j + ... + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \quad E^1_2 \\ \qquad\qquad a^2_{33}x_3 + ... + a^2_{3n}x_n = b^2_3 \quad E^2_3 \qquad ....... \\ \qquad\qquad ...... \\ \qquad\qquad a^2_{ij}x_j + ... + a^2_{in}x_n = b^2_i \quad E^2_i \\ \qquad\qquad ....... \\ \qquad\qquad ...... \\ \qquad\qquad a^2_{n3}x_2 + ... + a^2_{nj}x_j + ... + a^2_{nn}x_n = b^2_n \quad E^2_n \end{array}\right. \tag{4.4}$$

où

$$a^2_{ij} = a^1_{2j} - \frac{a^1_{i2}}{a^1_{22}}a^1_{ij}, \quad i,j = 3,n$$

Ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un système à matrice triangulaire supérieure :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \quad E_1 \\ \qquad a^1_{22}x_2 + ... + a^1_{2j}x_j + ... + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \quad E^1_2 \\ \qquad\qquad a^2_{33}x_3 + ... + a^2_{3n}x_n = b^2_3 \quad E^2_3 \\ \qquad\qquad\qquad ....... \\ \qquad\qquad\qquad ...... \\ \qquad\qquad\qquad\quad ....... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^{i-1}_{ii}x_i + ... + a^2_{in}x_n = b^{i-1}_i \quad E^{i-1}_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ...... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^{n-1}_{nn}x_n = b^{n-1}_n \quad E^{n-1}_n \end{array}\right. \tag{4.5}$$

où

$$a_{ij}^{l+1} = a_{ij}^{l} - \frac{a_{il}^{l}}{a_{ll}^{l}} a_{lj}^{l}, \quad i, j = l+1, n$$

et

$$b_{i}^{l+1} = b_{i}^{l} - \frac{a_{il}^{l}}{a_{ll}^{l}} b_{l}^{l}, \quad i = l+1, n$$